Συσχέτιση μεταφορικής **α**, γωνιακής επιτάχυνσης $\mathbf{α_{γων.}}$

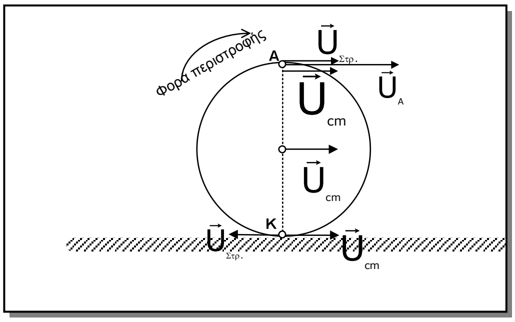
Παρακάτω θα δούμε μερικά παραδείγματα στα οποία θα συσχετιστούν η μεταφορική $\mathbf{α_{cm}}$ και η γωνιακή επιτάχυνση $\mathbf{α_{γων.}}$ Θα ξεκινήσουμε αρχικά και θα θυμηθούμε πως βρίσκουμε την ταχύτητα ενός σημείου που εκτελεί σύνθετη κίνηση:

Όταν έχουμε ελεύθερο στερεό τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η στροφική κίνηση γίνεται κάθε χρονική στιγμή γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το cm του . Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η ταχύτητα του cm να είναι μόνο μεταφορική.

Έστω ένας τροχός που εκτελεί σύνθετη κίνηση α) μεταφορική σε κατακόρυφο επίπεδο και β) στροφική πάνω στο επίπεδο της μεταφορικής και ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο αυτό.

Από την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων η ολική ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{U}}$ (από εδώ και στο εξής θα την ονομάζουμε ταχύτητα) είναι η συνισταμένη των ταχυτήτων της μεταφορικής $\boldsymbol{U_{MET.}} = \boldsymbol{U_{cm}}$ και της στροφικής των σημείων της περιφέρειας : $\boldsymbol{U_{Στρ.}}$ =ω.R

Δηλαδή : $\vec{U} = \vec{U}_{cm} + \vec{U}_{Στρ.}$ (1)



Για τις ταχύτητες των Α και Κ του διπλανού σχήματος έχουμε :

- Η ταχύτητα του σημείου Α είναι : $\mathbf{U_A}=\boldsymbol{U_{cm}}+\boldsymbol{U_{Στρ.}}$ (τα διανύσματα $\vec{U}_{cm}$ και $\vec{U}_{Στρ.}$ είναι ομόρροπα). (2)
- ενώ για την ταχύτητα του σημείου Κ έχουμε : $\mathbf{U_K}=\boldsymbol{U_{cm}}-\boldsymbol{U_{Στρ.}}$ (τα διανύσματα $\vec{U}_{cm}$ και $\vec{U}_{Στρ.}$ είναι αντίρροπα). (3)

1. ✎Όταν έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση όμως το σημείο επαφής **Κ** έχει ταχύτητα μηδέν (ως προς το έδαφος) με αποτέλεσμα η $U_k=0$, οπότε από την (2) προκύπτει ότι

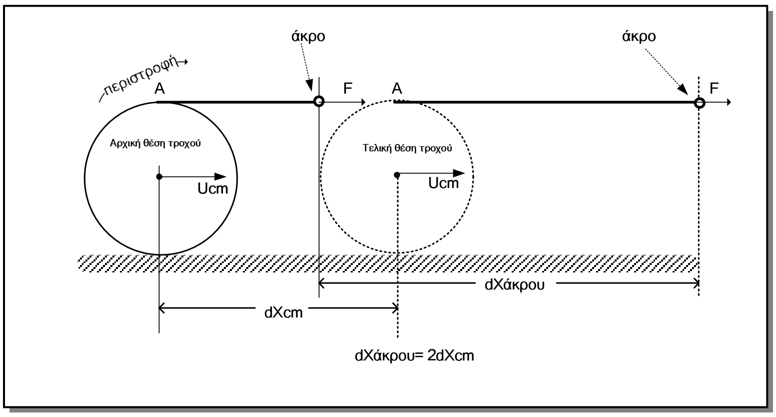
   α) $\boldsymbol{U_{cm}} = \boldsymbol{U_{Στρ.}}$ =ω.R. [Άρα από (2) και (3) προκύπτει: $U_A=2U_{cm}$ και φυσικά $U_K=0$]

   β) Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει : $\frac{d\boldsymbol{U_{cm}}}{dt} = \frac{dω}{dt}.R$ ⇨ $\boxed{\mathbf{α_{cm.}=α_{γων.}R}}$ και αυτή η σχέση δεν χρειάζεται απόδειξη στην περίπτωση της κύλισης χωρίς ολίσθηση ενός τροχού.

   γ) Είπαμε ότι $\boldsymbol{U_{cm}}$ =ω.R ⇨ $\frac{dx_{cm}}{dt} = \frac{dθ}{dt}.R$ ⇨ dx_{cm}=dθ.R ⇨ dx_{cm}=dS (δηλαδή όσο είναι η μετατόπιση του κέντρου μάζας σε χρόνο dt, τόσο είναι και το μήκος του τόξου που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας.

   Προσοχή: αν η μετατόπιση του cm είναι dx_{cm}, η μετατόπιση άλλων σημείων του τροχού δεν είναι ίδια. Ας δούμε την περίπτωση του σημείου Α.

   Αν έχουμε τυλιγμένο ένα νήμα γύρω από την περιφέρεια του τροχού και τραβάμε την ελεύθερη του άκρη και το cm μετατοπίζεται κατά dx_{cm}, τότε στον ίδιο χρόνο το σημείο Α άρα και το άκρο του νήματος θα έχει **διπλάσια** μετατόπιση. Η λογική του ισχυρισμού είναι η εξής :



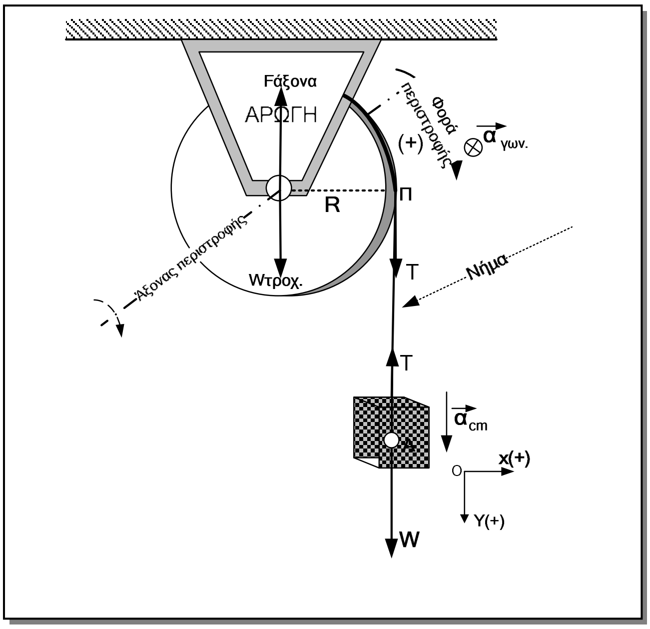
Προσέξτε το επόμενο συλλογισμό γιατί είναι αυτός που χρησιμοποιείται σε κάθε άσκηση που προσπαθούμε να συσχετίσουμε μήκος, ταχύτητα και επιτάχυνση 2 σωμάτων :Το άκρο του νήματος (το οποίο δεν είναι εκτατό, δεν είναι λάστιχο δηλαδή) έχει ταχύτητα U. Η ταχύτητα λοιπόν του άκρου, είναι ίση με την ταχύτητα $\mathbf{U_A}$ του σημείου Α της περιφέρειας του τροχού (*το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του τροχού)*.

Με βάση το παραπάνω έχουμε : $U_{άκρου}=U_A=2U_{cm}$ ⇨ $\boxed{\mathbf{dx_{άκρου}=2x_{cm}}}$

Άρα προκύπτει το εξής : αν το cm μετατοπιστεί κατά ορισμένη απόσταση τότε το άκρο του νήματος θα έχει την διπλάσια μετατόπιση.

Συσχέτιση μεταφορικής **α**, γωνιακής επιτάχυνσης **$\alpha_{γων.}$**

2. ✎ Νήμα είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια της τροχαλίας και στο ελεύθερο του άκρο έχουμε δέσει το σώμα Σ. Αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Σ το οποίο πέφτει κατακόρυφα. Αν το *νήμα έχει αμελητέα μάζα και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας τότε να βρείτε α)* τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα του σώματος Σ U, σε σχέση με την γωνιακή ταχύτητα ω, περιστροφής της τροχαλίας β) την σχέση της μεταφορικής επιτάχυνσης α του σώματος Σ και της γωνιακής επιτάχυνσης $\alpha_{γων.}$ της τροχαλίας και γ) το μήκος του νήματος που ξεδιπλώνεται σε σχέση με τη μετατόπιση κατά την πτώση του Σ.



<u>Λύση</u>

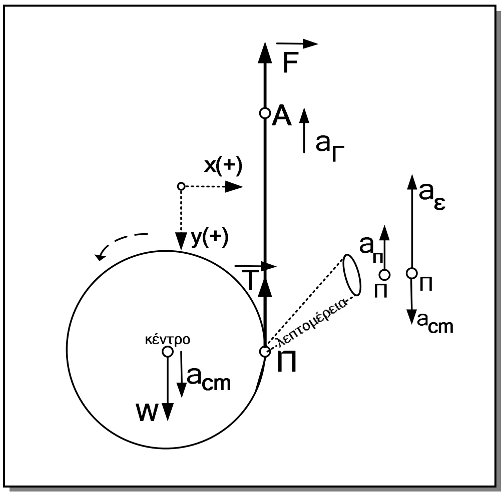
Το σημείο **Π** είναι σημείο της περιφέρειας και ταυτόχρονα σημείο του νήματος. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας, κάθε χρονική στιγμή η ταχύτητα της περιφέρειας είναι ίση με την ταχύτητα των σημείων του νήματος. Το **Α** είναι σημείο του σώματος **Σ** και ταυτόχρονα σημείο του νήματος. Με βάση τον παραπάνω συλλογισμό η <u>ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας (</u>κάθε σημείο της περιφέρειας κάνει μόνο κυκλική κίνηση) είναι ίση με την ταχύτητα του σώματος Σ (το οποίο εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση), δηλαδή :

α) $\mathbf{U_Π=U_A} \Rightarrow \boxed{\mathbf{U_A=ω.R}}$ (1)

β) Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει : $\frac{d\boldsymbol{U_{cm}}}{dt}=\frac{dω}{dt}.R \Rightarrow \boxed{\mathbf{α_{cm.}=α_{γων.}R}}$ (2) (αυτή η σχέση θέλει απόδειξη στην περίπτωση αυτή αλλά και σε κάθε περίπτωση που δεν είναι κύλιση χωρίς ολίσθηση)

γ) Από την (1) με παραγώγιση προκύπτει ακριβώς το ίδιο συμπέρασμα με την περίπτωση 1, δηλαδή όσο είναι το μήκος του νήματος που ξεδιπλώνεται από την περιφέρεια της τροχαλίας τόση είναι η μετατόπιση κατά την πτώση του σώματος Σ : $\boxed{\mathbf{dL_{νήματος}=dy_{πτώσης\ Σ}}}$

3. ✎Στην τροχαλία του διπλανού σχήματος, το νήμα που έχει αμελητέα μάζα και είναι μη εκτατό, είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια της τροχαλίας. Κρατάμε το ελεύθερο άκρο του νήματος με το χέρι μας και αφήνουμε ελεύθερη την τροχαλία να κινηθεί. Να βρείτε τις σχέσεις των μεγεθών όπως στην άσκηση 2.



<u>Λύση</u>

Ανάλογα με την δύναμη $\vec{F}$, που ασκούμε στο άκρο **Α**, η τροχαλία μπορεί : α) να αιωρείται, δηλαδή το κέντρο της να έχει ταχύτητα μηδέν $\mathbf{U_{cm}=0}$ β) να κατεβαίνει ή γ) να ανεβαίνει.

Ας δούμε την ανάλυση:

Κάθε χρονική στιγμή και επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας θα πρέπει η ταχύτητα U_A του άκρου Α, να είναι ίση με την ταχύτητα $U_Π$ του σημείου Π της περιφέρειας της τροχαλίας, δηλαδή $\mathbf{U_A=U_Π}$. Το ίδιο ισχύει και για τις επιταχύνσεις.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, για τη συσχέτιση των μεγεθών που αναφέραμε βολεύει να ξεκινήσουμε από την συσχέτιση των επιταχύνσεων (αυτό γιατί η δύναμη καθορίζει σαν πρώτη φάση την επιτάχυνση) και θα υποθέσουμε ότι α) αρχικά αφήνουμε ($ω_0=0$ και $U_{cm.0}=0$) την τροχαλία και ταυτόχρονα ασκούμε την F και β) θα υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας γιατί εργαζόμαστε με αλγεβρικές τιμές, ότι το cm επιταχύνεται προς τα κάτω.

➢Κάθε χρονική στιγμή ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο του τροχού και είναι κάθετος στο επίπεδο του. Συνεπώς η μοναδική δύναμη που δημιουργεί ροπή (άρα είναι υπεύθυνη για την περιστροφή) είναι η τάση $\vec{T}$ του νήματος, οπότε και η τροχαλία θα στρέφεται αντιωρολογιακά (αριστερόστροφα).

Συσχέτιση μεταφορικής **α**, γωνιακής επιτάχυνσης $\mathbf{a_{γων.}}$

Το σημείο Π κάνει σύνθετη κίνηση α) μια μεταφορική, άρα έχει ταχύτητα προς τα κάτω (παραπάνω υποθέσαμε ότι το cm κινείται προς τα κάτω) β) και μια κυκλική, η οποία λόγω της θέση του σημείου Π πάνω στον τροχό έχει φορά προς τα επάνω : $U_{κυκλικής/Π}=ω.R$.

Για την ολική ταχύτητα του σημείου Π έχουμε : $\vec{U}_Π=\vec{U}_A=\vec{U}_{cm}+\vec{U}_{Κυκλικής/π}$ ⇒$-U_A=U_{cm}-U_{κυκλικής/π}$⇨$U_A=U_{κυκλικής/Π}-U_{cm}$ (I) ⇨$U_A=ω.R-U_{cm}$ (II) Αν παραγωγίσουμε την σχέση αυτή προκύπτει η σχέση των επιταχύνσεων δηλαδή **:**

$$\boxed{\mathbf{a_A=a_Π=a_{γων.}R-a_{cm} \Rightarrow a_{γων.}R= a_{cm}+ a_A \ (III)}}$$

✓Αν εφαρμόσουμε τον Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για το νήμα, το οποίο έχει αμελητέα μάζα έχουμε : $ΣF_y=m_{νήματος}.α_{νήματος}$⇨ F-T′ =0.$α_{νήματος}$⇨T=T′ = F [T′ είναι η αντίδραση (ασκείται πάνω στο νήμα από την τροχαλία στο σημείο Π) στην δύναμη T που ασκεί το νήμα στην τροχαλία). Με απλά λόγια η δύναμη $\vec{F}$ μεταφέρεται στην περιφέρεια του τροχού.

✓ Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για το cm : $ΣF_y=m.a_{cm}$⇨$W-F=m.a_{cm}$⇨$mg-F=m.a_{cm}$ (IV)

✓Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης, ως προς το κέντρο της τροχαλίας έχουμε: $Στ_{(κέντρο)}=I_{cm}a_{γων.}$ ⇨ $F.R=1/2mR^2.a_{γων.}$ ⇨ $F=\frac{1}{2}mR.a_{γων.}$(V).

Στην (IV) αντικαθιστούμε τις σχέσεις (III) και (IV) και προκύπτει **:** $\boxed{\mathbf{a_{cm}=\frac{2g-a_A}{3}}}$ (VI)

• Ανάλογα λοιπόν με την τιμή της F το cm μπορεί να παραμένει Ακίνητο, να ανεβαίνει ή να κατεβαίνει. Αν για παράδειγμα $\mathbf{a_{cm}=0}$**,** οπότε και η τροχαλία αιωρείται, τότε από (IV) προκύπτει : F = mg .