

Θεώρημα Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας

Εισαγωγή : Η μηχανική ενέργεια $E_{\text{ΜΗΧ.}}$ ενός συστήματος σωμάτων είναι το άθροισμα κάθε τύπου κινητικής και κάθε τύπου δυναμικής ενέργειας, δηλαδή $E_{\text{ΜΗΧ.}} = K + U$.

1. Για την **κινητική ενέργεια** έχουμε : $K = K_{\text{ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ}} + K_{\text{ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ}}$
 - ❖ Αν το σώμα εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση ή είναι ασημαντων διαστάσεων (σημειακό σώμα) δεν υπάρχει η $K_{\text{ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ}}$, δηλαδή $K_{\text{ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ}} = 0$
2. Για την **δυναμική ενέργεια** : Στις ασκήσεις της Γ Λυκείου έχουμε Βαρυτική δυναμική ενέργεια U_B και δυναμική ενέργεια ελαστικότητας σε παραμορφωμένο ελατήριο $U_{\text{ελ.}}$

❖ Για την **βαρυτική ενέργεια** : Για να την υπολογίσουμε πρώτα επιλέγουμε μια οριζόντια επιφάνεια στην οποία αν βρεθεί το cm των σωμάτων δεν υπάρχει βαρυτική ενέργεια. Αυτή η οριζόντια επιφάνεια ονομάζεται *επιφάνεια αναφοράς* και βολεύει να την επιλέγουμε ώστε πάνω σε αυτήν να βρίσκεται η **χαμηλότερη** θέση της κίνησης των cm όλων των στερεών του συστήματος. Η σχέση από την οποία υπολογίζουμε την $U_{\text{βαρ.}}$ είναι : $U_{\text{βαρ.}} = \pm mgh$, όπου h είναι η απόσταση του cm του στερεού από την επιφάνεια αναφοράς.

Το (+) : όταν το cm είναι **πάνω** από την επιφάνεια αναφοράς.

Το (-) : όταν το cm είναι **κάτω** από την επιφάνεια αναφοράς.

Στο διπλανό (σχήμα1) σχήμα μια ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το άκρο της A το οποίο στηρίζεται σε άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο αφήνεται, ενώ στο άλλο της άκρο είναι συγκολλημένη μια σημειακή μάζα. Η ράβδος αφήνεται από την οριζόντια θέση και προφανώς κάποια στιγμή περνάει και από την κατακόρυφη θέση. Αν επιλέξουμε τυχαία το επίπεδο αναφοράς προκύπτουν οι παρακάτω τιμές για την βαρυτική ενέργεια της ράβδου και της σημειακής μάζας :

A) Για την ράβδο: $U_{\text{βαρ. (ράβδου)}} = +Mgh_1$

B) Για την σημειακή μάζα: $U_{\text{βαρ. (σημειακής)}} = -mgh_2$

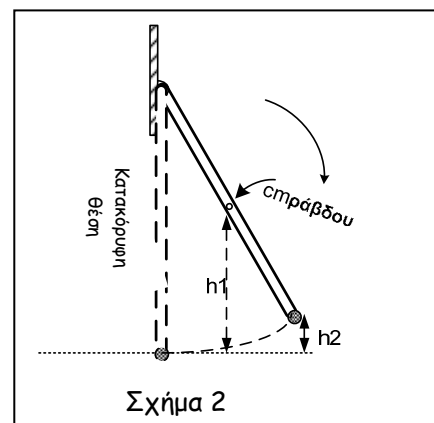
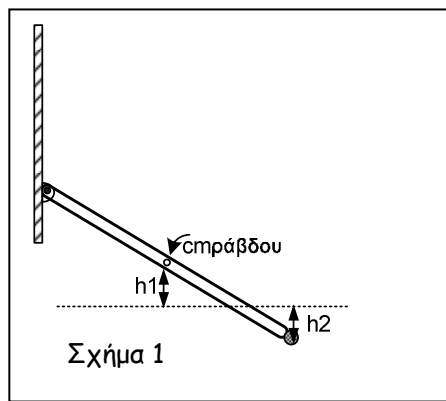
Αυτό είναι μια 'κακή' επιλογή με το σκεπτικό ότι δεν μας συμφέρει να έχουμε αρνητικές τιμές στην δυναμική ενέργεια στους μαθηματικούς υπολογισμούς. Αντίθετα στο δεύτερο σχήμα (σχήμα 2) κάναμε καλή επιλογή του επιπέδου αναφοράς γιατί το cm της ράβδου και η σημειακή μάζα είναι "πάνω" από το επίπεδο αναφοράς οπότε η βαρυτική δυναμική τους ενέργεια είναι θετική. Η επιλογή έγινε με το σκεπτικό ότι καθώς το σύστημα περιστρέφεται πέφτοντας και η ράβδος γίνει κατακόρυφη, από το δύο στερεά από τα οποία αποτελείται η κατώτερη θέση της σημειακής μάζας είναι πάνω στην επιφάνεια αναφοράς, με αποτέλεσμα η βαρυτική δυναμική ενέργεια της σφαίρας όταν βρεθεί σε εκείνη τη θέση είναι μηδέν. Προφανώς μας συμφέρει να υπάρχουν όροι με μηδενική τιμή γιατί έτσι οι υπολογισμοί είναι απλούστεροι.

Συνεπώς με την παραπάνω επιλογή έχουμε :

A) Για την ράβδο: $U_{\text{βαρ. (ράβδου)}} = +Mgh_1$

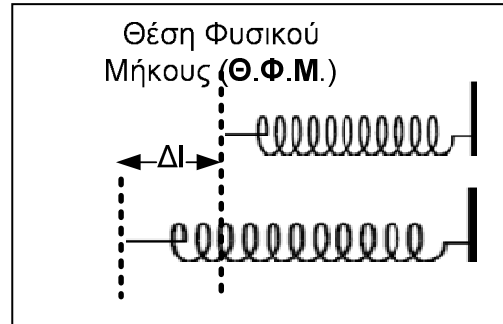
B) Για την σημειακή μάζα: $U_{\text{βαρ. (σημειακής)}} = +mgh_2$

Για την αρχική θέση της ράβδου
όχι στην κατακόρυφη θέση.



❖ **Για την δυναμική ενέργεια του ελατηρίου:**

Το ελατήριο είναι ιδανικό και αυτό σημαίνει ότι δεν θα έχει μάζα και οι παραμορφώσεις του υπακούουν το νόμο Hooke, δηλαδή το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση : $F_{\text{ελατ.}} = k\Delta l$, όπου Δl η παραμόρφωση του ελατηρίου από τη θέση φυσικού του μήκους. Λόγω της παραπάνω σχέσης ένα ελατήριο ασκεί δύναμη σε ένα σώμα όταν το ελατήριο δεν έχει το φυσικό του μήκος δηλαδή όταν είναι παραμορφωμένο. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου $U_{\text{ελατ.}} = \frac{1}{2} k\Delta l^2$.



Προσοχή : Η $U_{\text{ελατ}}$ λαμβάνει υπόψη της την παραμόρφωση του ελατηρίου και όχι την απομάκρυνση από τη Θ.Ι.Τ.

Το θεώρημα διατήρησης της Μηχανικής ενέργειας ενός σώματος ή συστήματος σωμάτων εφαρμόζεται σε ασκήσεις που ζητούν (συνήθως):

α) γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας ενός στερεού β) γωνιακή ταχύτητα γ) σταθερά ελατηρίου δ) μάζα ,ε) ροπή αδράνειας και συνήθως δεν δίνεται και δεν ζητάμε χρονική στιγμή.

Συνήθως το θεώρημα εφαρμόζεται όταν το κέντρο μάζας του στερεού ή κάποιου εκ των στερεών του συστήματος εκτελεί καμπυλόγραμμη κίνηση (π.χ. κυκλική).

Για την εφαρμογή του θεωρήματος πρέπει επάνω στα στερεά του συστήματος να ασκούνται:

A) μόνο συντηρητικές δυνάμεις (Βάρος, Δύναμη ελατηρίου, δύναμη από ηλεκτροστατικό πεδίο, δύναμη από φυσικούς μαγνήτες) άνωση.

B) συντηρητικές και μη συντηρητικές δυνάμεις που όμως δεν παράγουν έργο.

Σημείωση: στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι το θεώρημα ισχύει και στις παρακάτω περιπτώσεις : α) όταν στο σύστημα επενεργεί στατική τριβή. Η στατική τριβή παράγει έργα αντίθετα στην μεταφορική και στην στροφική κίνηση του στερεού, με αποτέλεσμα να μην προκαλεί μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος, άρα και στην μηχανική ενέργεια του συστήματος. Προσοχή λοιπόν στο ότι η στατική τριβή δεν είναι ότι δεν παράγει έργο, αλλά δεν προκαλεί μεταβολή στη μηχανική ενέργεια β) Οι εσωτερικές δυνάμεις (εκτός της τριβής ολισθήσεως) ακόμα και αν δεν είναι συντηρητικές δυνάμεις π.χ. οι τάσεις στα άκρα του ίδιου νήματος γιατί δημιουργούν αντίθετες ποσότητες ενέργειας μέσω του έργου τους.

Το Θεώρημα λοιπόν εφαρμόζεται ως εξής :

$$E_{\text{Μηχ(αρχ)}} = E_{\text{Μηχ(τελ)}} \Rightarrow K_{\text{μετ(αρχ)}} + K_{\text{στροφ(αρχ)}} + U_{\text{βαρ(αρχ)}} + U_{\text{ελατ.(αρχ)}} = K_{\text{μετ(τελ)}} + K_{\text{στροφ(τελ)}} + U_{\text{βαρ(τελ)}} + U_{\text{ελατ.(τελ)}}$$