ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α. Έστω f μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν είναι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. *[Μονάδες 6,5]*

β. Χαρακτηρίστε Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) τις προτάσεις :

1. Αν είναι $f'(x) \geq 0$ στο $\Delta = (\alpha, \beta)$ αλλά όχι $f'(x) > 0$ σ' όλο το Δ, τότε η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Σ ☐ **Λ** ☐

2. Αν $f'(x) < 0$ στο διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ τότε η f μπορεί να έχει τοπικό ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in (\alpha,\beta)$

Σ ☐ **Λ** ☐

3. Αν $f'(x) \leq 0$ στο (α, β) και $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha) \\ \text{και} \\ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta) \end{cases}$ τότε η f έχει πάντα δύο ακρότατα στο Δ.

Σ ☐ **Λ** ☐

4. Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x) < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Σ ☐ **Λ** ☐

[Μονάδες 4]

Β.α. Αν f : Συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ αν $f(\alpha) = 2003$, $f(\beta) = 2005$ τότε η εξίσωση $f(x) = 2004$

1. έχει μοναδική ρίζα στο (α, β)

2. έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)

3. έχει μια το πολύ ρίζα στο (α, β)

4. έχει δύο ακριβώς ρίζες στο (α, β)

5. δεν ισχύει κανένα από τα προηγούμενα

[Μονάδες 2]

Β.β. Δείξτε ότι : $x\,\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \geq 1$, για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

[Μονάδες 12,5]

Ελένη Πίνη, Μαθηματικός

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 με $|z_1| = |z_2| = 1$, $z_1 \neq z_2$. Αν $w = \dfrac{z_2 - z_1}{z_1 z_2 - 1}$.

α. Δείξτε ότι $w \in R$

[Μονάδες 12,5]

β. Αν $|w| > 1$:

i. Δείξτε ότι η εξίσωση : $x^{\nu}\, Im(z_1) + (1-x)^{\nu}\, Im(z_2) + \lambda(x^2 - x) = 0$, $\nu \in N^*$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1) ως προς x

[Μονάδες 6]

ii. Να βρεθούν οι z_1, z_2, w αν είναι γνωστό ότι : $Im(z_1) = 1$, $Re(z_2) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[Μονάδες 6,5]

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Δείξτε ότι η Cf (με f(x) = x ημx) έχει μοναδικό σημείο καμπής στο $(0, \dfrac{\pi}{2})$

[Μονάδες 10]

Β. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f, g και ισχύουν οι σχέσεις :

$$\begin{cases} \bullet \displaystyle\int_1^x f(t)dt + \int_x^1 g(t)dt = x^2 - 2x + 1, \quad x \in R \\ \\ \bullet \text{ Η εξίσωση } f(x) = 0 \text{ έχει ρίζες } P_1, P_2 \text{ όπου } P_1 < 1 < P_2 \end{cases}$$

α. Δείξτε ότι

i. Η εξίσωση g(x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (P_1, P_2)

ii. Υπάρχει $\xi \in (P_1, P_2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = -2$

β. Αν η συνάρτηση g είναι κυρτή στο R δείξτε ότι

i. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R

ii. Η f έχει ένα τοπικό ελάχιστο στο R στο x = ξ του ερωτήματος α_{ii}

γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τον άξονα y΄y

[Μονάδες 15]

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Αν $f(x) = \dfrac{x}{e^{\nu x}}$, $\nu \in N^*$

i. Να βρεθούν οι : μονοτονία, ακρότατα κοίλα και σημεία καμπής της Cf

ii. να βρεθούν οι οριζόντιες ασύμπτωτες της Cf (αν υπάρχουν)

iii. Δείξτε ότι : $\dfrac{2}{\nu^2 e^2} \le \int_{1/\nu}^{2/\nu} f(x)dx \le \dfrac{1}{\nu^2 e}$

[Μονάδες 15]

Β. Αν $f(x) + g(x) = -xe^{-x}$ για κάθε $x \in R$ είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και η g είναι περιττή.

i. Δείξτε ότι : $f(x) - g(x) = x\,e^{x}$

ii. Ποιο το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από Cf, Cg και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 0$, $x = 1$.

[Μονάδες 10]