ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Θέμα 1ο :

Α. α) Αποδείξτε ότι όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα η διακύμανση ορίζεται από την σχέση : $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i}{\nu} - \overline{x^2}$ **.**

β) Σε ένα δείγμα μεγέθους ν η μεταβλητή Χ παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1 με ν_1 , ν_2 αντίστοιχες συχνότητες.

i) Να δείξετε ότι $\bar{x} = \frac{\nu_2}{\nu}$ **.**

ii) Αποδείξτε ότι για την διακύμανση s^2 ισχύει : $s^2 \le \frac{1}{4}$ **.**

Β. Δίνεται το δείγμα x_1 , x_2 , … , x_ν.

α) Να αποδείξετε ότι $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \overline{x^2}$ **.**

β) Αν το δείγμα έχει $\bar{x} = 12$ και $s = 3$, να βρείτε τη μέση τιμή του δείγματος : x_1^2 , x_2^2 , … , x_ν^2.

γ) Αν ισχύει $\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 = \frac{4}{3}\nu\overline{x^2}$ **, εξετάστε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.**

δ) Να βρείτε το μέγεθος του δείγματος, αν είναι γνωστό ότι η διακύμανση είναι ίση με 4 , CV = 1 και $\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 = 32$ **.**

Γ. Έστω x_1 , x_2 , … , x_{30} τα βάρη των μαθητών μιας τάξης. Αν ισχύει :
$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = 450 + \sum_{i=1}^{n} x_i$ **και CV = 50 %**

α) Να δείξετε ότι ισχύει : $s^2 = 15 + \bar{x}$ **.**
β) Να βρείτε το μέσο βάρος.
γ) Υπολογίστε τη διακύμανση.

Θέμα 2ο :

Α. Ένα δείγμα έχει μέση τιμή $\bar{x}$ και διακύμανση s^2.
Ποια θα είναι η νέα μέση τιμή και ποια η τυπική απόκλιση, όταν κάθε τιμή του δείγματος :
α) αυξηθεί κατά δύο μονάδες
β) αυξηθεί κατά 10 %
γ) μειωθεί κατά 12 %

Β. Ένα δείγμά ν παρατηρήσεων υψών , μετρημένων σε cm, έχει μέση τιμή $\bar{x}$ = 160cm, διακύμανση s^2 = 64 cm^2 και CV = 0,05.
Αν αλλάξουμε μονάδα μέτρησης από cm σε m να βρείτε μετά την αλλαγή :
α) τη μέση τιμή
β) την τυπική απόκλιση
γ) τον συντελεστή μεταβολής.

Γ. Μια επιχείρηση έχει προς ενοικίαση αυτοκίνητα για τα οποία ο μέσος χρόνος λειτουργίας τους πριν την εμφάνιση της πρώτης βλάβης είναι 12 μήνες με τυπική απόκλιση 3 μήνες.
α) Να αποδείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.
β) Αν η επιχείρηση έχει φροντίσει να μεγαλώσει τον χρόνο λειτουργίας κάθε αυτοκινήτου πριν την εμφάνιση της πρώτης βλάβης κατά c μήνες , να βρείτε την ελάχιστη τιμή του c για την οποία το δείγμα είναι ομοιογενές.

Θέμα 3ο :

Α. Έστω x_1 , x_2, x_3 , x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής ενός δείγματος με αντίστοιχες συχνότητες v_1 , v_2 , v_3 , v_4. Αν ισχύει $N_i = 3i^2 + 2$, i = 1,2,3,4
Να βρείτε :
α) το μέγεθος του δείγματος
β) την v_4
γ) το πλήθος των παρατηρήσεων που έχουν τιμή :
i) το πολύ x_3
ii) τουλάχιστον x_3
δ) την f_3

Β. Η βαθμολογία μιας ομάδας μαθητών σε ένα μάθημα κυμαίνεται από 8 έως 20. Το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων έχει κορυφές τα σημεία:
(0 ,0) , (4 ,10) , (8 ,40) , (12 ,80) , (16 ,90) , (20 ,100).
Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι 20 μαθητές έχουν βαθμό μικρότερο του 6.
α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 80.
β) Να βρείτε την διάμεσο
γ) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Θέμα 1ο :

Α. Αποδείξτε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ισχύει :
$P(A) = 1 - P(A')$.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)
α) Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει :
$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
β) Όταν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A \cap B$, τότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A \cup B$.
γ) Τα ενδεχόμενα Β – Α και Α είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα.
δ) Αν $B \subseteq A$, τότε $P(A) \le P(B)$.

Θέμα 2ο :

Α. Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά και σημειώνουμε τον αριθμό της άνω έδρας του. Ποιες οι πιθανότητες :
- **i) ο αριθμός να είναι άρτιος**
- **ii) ο αριθμός να είναι μεγαλύτερος του 3**
- **iii) ο αριθμός να είναι άρτιος η΄ μεγαλύτερος του 3**

Β. Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με
$P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$.
Ποια είναι η πιθανότητα :
- **i) να μην πραγματοποιείτε το Α**
- **ii) να πραγματοποιείτε τουλάχιστον ένα από τα Α και Β**
- **iii) να μην πραγματοποιείτε κανένα από τα Α και Β**
- **iv) να πραγματοποιείτε ακριβώς ένα από τα Α και Β .**

Θέμα 3ο :

Α. Έστω Α΄ και Β΄ είναι τα αντίθετα ενδεχόμενα των Α και Β αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι : $P(B') - P(A') \le P(A - B)$.

Β. Έστω $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ με $P(x_1) = \frac{4}{11}$, $P(x_2) = P(x_3) = \frac{1}{11}$,
$P(x_4) = \frac{2}{11}$ και $P(x_5) = \frac{3}{11}$ και τα ενδεχόμενα $A = \{x_1, x_2\}$ και $B = \{x_1, x_2, x_3\}$.

α) Να αποδείξετε ότι

i) $P(A \cap B) = \frac{5}{11}$

ii) $P(A \cup B) = \frac{6}{11}$.

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες :

i) $P(A \cap B')$

ii) $P(A' \cap B')$

<u>Θέμα 4ο</u> :

Θεωρούμε την εξίσωση : $\alpha\chi^2 + 4\chi + \beta = 0$ (Ι).
Οι πιθανές τιμές των συντελεστών α και β είναι 1 , 2, και 3.
Δείξτε ότι τα ζεύγη (α, β) είναι ισοπίθανα.
Υπολογίστε τις πιθανότητες των ενδεχομένων.

Α : Η (Ι) έχει δύο ρίζες ίσες
Β : Η (Ι) έχει δύο ρίζες άνισες
Γ : Η (Ι) δεν έχει πραγματικές ρίζες