

Ζήτημα 1°

A. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό να αποδειχθεί ότι $f'(x_0) = 0$.

B. i. Ισχύει: $\ln x + \frac{\alpha}{x} \geq \alpha$ για κάθε $x > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από τις παρακάτω:

Η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{\alpha}{x}$ με $x \in (0, +\infty)$:

α. Δεν παρουσιάζει κανένα τοπικό ακρότατο στο διάστημα $(0, +\infty)$

β. Η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

γ. Στο $x_0 = 1$ η C_f παρουσιάζει οριζόντια εφαπτόμενη.

δ. Η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$.

ii. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\ln[f^2(x) + 1] + e^{f(x)} = e^x + \frac{x^3}{3} + 2x + 2008.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει κανένα τοπικό ακρότατο στο \mathbb{R} .

Ζήτημα 2°

Έστω $f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$ όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq \pm 1$.

α. Να λυθεί η εξίσωση $f(z) = \frac{1}{2z + 1}$.

β. Αν η εικόνα του μιγαδικού $f(z)$ ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 2 να αποδειχθεί ότι για τον μιγαδικό z ισχύει: $|z - 1| \cdot |z + 1| = |z|$

γ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού z αν ο μιγαδικός $f(z)$ είναι φανταστικός.

Ελένη Πίνη, Μαθηματικός

Ζήτημα 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x + \chi \sigma \nu x$ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$

α. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ στο οποίο η f παρουσιάζει κρίσιμο σημείο.

β. Είναι τελικά το παραπάνω κρίσιμο σημείο ακρότατο και αν ναι, τότε να βρεθεί το είδος του.

γ. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $\rho \in (\xi, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε να ισχύει $(\xi - \frac{\pi}{2})f'(\rho) = f(\xi) - 1$

δ. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f που να δέχεται εφαπτόμενη με κλίση μεγαλύτερη του 2.

Ζήτημα 4°

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$\int_1^x \frac{2f(t)}{x} dt + x = 2(\ln x - 1) + \frac{3}{x} \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α. Αποδείξτε ότι η μοναδική συνάρτηση για την οποία ισχύει η παραπάνω σχέση είναι η $f(x) = \ln x - x$ με $x \in (0, +\infty)$.

β. Να μελετηθεί η $f(x)$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου $E(\lambda)$ που περικλείεται μεταξύ των συναρτήσεων:

$$g(x) = \ln x, \quad h(x) = x \quad \text{και των } x = 1 \text{ και } x = \lambda \text{ με } \lambda > 1.$$

δ. Να βρεθεί το όριο: $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.