ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει :
$[f(x)]^{1821}+\alpha[f(x)]^3=-e^{f(x)}$, α>0 ,για κάθε $x\in\Re$.
α) Να δείξετε ότι f(x)=c , για κάθε $x\in\Re$,όπου c αρνητική σταθερά .
β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x-1}$.

2) Έστω η συνεχής στο $\Re$ συνάρτηση f και η παραγωγίσιμη στο $\Re$ συνάρτηση g για τις οποίες ισχύουν : $(f\circ f\circ f)(x)=x$ και $(f\circ f)(x)=g'(x)$, για κάθε $x\in\Re$.
Αν η C_g διέρχεται από τα σημεία Α(1 , 3) και Β(2 , $\frac{9}{2}$) , να δείξετε ότι :

α) $\displaystyle\int_0^1 f(g'(x))dx=\frac{1}{2}$.

β) $\displaystyle\int_1^2 (f\circ f\circ\cdots\circ f)(t)dt=\frac{3}{2}$ (η f εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα 2009 φορές) .

3) α) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [-α , α] , α >0 . Να αποδείξετε ότι :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\begin{cases} 2\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)dx & \text{, αν η f είναι άρτια .}\\ 0 & \text{, αν η f είναι περιττή .}\end{cases}$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_{-0,2}^{0,2}\sigma\upsilon\nu(xe^{|x|}+\eta\mu x)\cdot\log\frac{1+x}{1-x}dx$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $J=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x^5-2x^3-10x+\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$.

4) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\Re$.
α) Αν για κάθε x , y $\in\Re$ ισχύει f(x + y) = f(x) + f(y) + λxy(x+y) , $\lambda\in\Re$, να δείξετε ότι $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=0$ ($\alpha\in\Re$) .

β) Αν για κάθε $x\in\Re$ ισχύει $\displaystyle\int_1^{3x} f(t)dt\geq 3x-1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\displaystyle\int_x^{f(x)} f(t)dt=(f(x))^3-x^3$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα .

Επιμέλεια: Μπάρας Θανάσης, Μαθηματικός

5) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Re$ η οποία είναι συνεχής στο 13 και ισχύει $f(x + y) = 5f(x)f(y)$, για κάθε x , y $\in \Re$.

α) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\Re$.

β) Αν $g(x) = \int_1^x f(t)dt \cdot \int_2^x f(t)dt \cdot \int_3^x f(t)dt \cdot \ldots \cdot \int_{100}^x f(t)dt$, να δείξετε ότι η C_g δέχεται τουλάχιστον 99 οριζόντιες εφαπτόμενες .

6) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του οποίου οι διαστάσεις μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου t . Αν το μήκος και το πλάτος αυξάνονται με ρυθμό 1m/sec , 2m/sec αντιστοίχως , ενώ το ύψος ελαττώνεται με ρυθμό 2m/sec , να βρείτε τη χρονική στιγμή t_o που το ύψος είναι ίσο με το πλάτος και ίσο με 4m :

α) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου .

β) το ρυθμό μεταβολής του όγκου του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου .

7) α) Αν f , g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α , β] και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha , \beta]$, να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

β) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α , β] να δείξετε ότι $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$.

γ) Αποδείξτε ότι : $\left|\int_1^2 (x\sigma\upsilon\nu(e^x + 1) + \eta\mu\frac{1}{x})dx\right| \leq \frac{5}{2}$.

8) Δίνεται η συνεχής στο $\Re$ συνάρτηση f και η συνάρτηση

$$g(x) = \int_1^x (\int_1^t (\int_1^z f(u^5)du)dz)dt .$$

α) Να βρείτε τις g' , g'', $g^{(3)}$.

β) Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \to 1} \frac{g(x)}{(x-1)^3}$ αν είναι γνωστό ότι f(1) = 12 .

γ) Αν για κάθε $x \in \Re$ είναι $f(x) \neq 0$, να δείξετε ότι η g'' είναι γνησίως μονότονη .