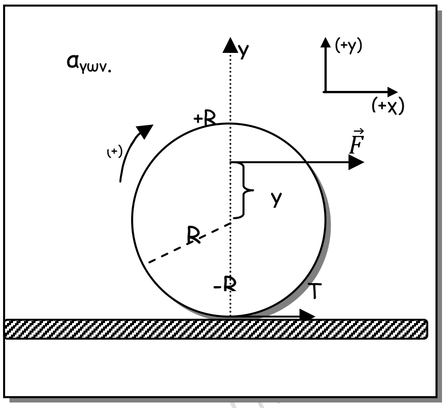
Μερικά ειδικά θέματα…

1. Ο ομογενής τροχός του σχήματος έχει μάζα m ακτίνα R. Η σταθερή δύναμη $\vec{F}$ ασκείται σε ένα σημείο της κατακόρυφης διαμέτρου. Αν y είναι η θέση του σημείου εφαρμογής (y=0 το κέντρο του κύκλου) της δύναμης και προφανώς -R≤ y ≤+R τότε να γίνει η γραφική παράσταση της στατικής τριβής Τ σε συνάρτηση με την θέση y, αν γνωρίζουμε ότι ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα του $I_{cm}=\frac{1}{2}mR^2$.



Απάντηση:

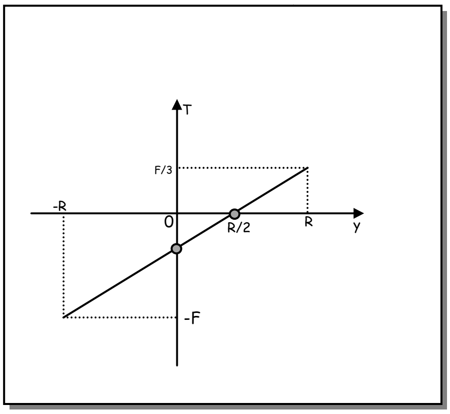
Έστω a_{cm} η μεταφορική επιτάχυνση του τροχού και $a_{γων.}$ η γωνιακή επιτάχυνση του. Επειδή ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει η σχέση : $a_{cm}=a_{γων.}R$ (1). Έστω ότι αποφασίσαμε να σχεδιάσουμε την στατική τριβή με φορά προς τα εμπρός (ο σχεδιασμός γενικά είναι αυθαίρετος)

Για τη μεταφορική κίνηση του τροχού από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον οριζόντιο άξονα έχουμε : $\Sigma F_X=ma_{cm} \Rightarrow F+T=ma_{cm}$ (2)

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ως προς το κέντρο του τροχού έχουμε:$\Sigma\tau_{(κέντροτουτροχού)}=I_{cm}.a_{γων.} \Rightarrow F.y-T.R=\frac{1}{2}mR^2 a_{γων.} \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$F.y-T.R=\frac{1}{2}mR^2\frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow F.y-T.R=\frac{1}{2}Rma_{cm} \overset{(2)}{\Rightarrow} F.y-T.R=\frac{1}{2}R(F+T) \Rightarrow$

$\boxed{T=\frac{F}{3}\left(\frac{2y}{R}-1\right)}, -R \le y \le +R$ (3). Η γραφική παράσταση της σχέσης (3) φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Από γράφημα προκύπτει το εξής συμπέρασμα : Η στατική τριβή έχει θετική αλγεβρική τιμή, δηλαδή φορά προς τα εμπρός ή πιο απλά έχει ίδια φορά με την $\vec{F}$ όταν το σημείο εφαρμογής της $\vec{F}$ είναι πάνω από το κέντρο Ο του τροχού και συγκεκριμένα όταν :$\frac{R}{2}$ <y≤R. Οπότε αν σε άσκηση τέτοιου τύπου η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται στην περιφέρεια του τροχού τότε αν ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει θα σχεδιάζουμε την στατική τριβή με ίδια φορά με την $\vec{F}$.

2. Μια ομογενής σφαίρα, μάζας m και ακτίνας R εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$ κατά μήκος οριζόντιου επιπέδου με αρχική ταχύτητα u_0 για το κέντρο μάζας η οποία είναι παράλληλη με το οριζόντιο επίπεδο και αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0, ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο και είναι παράλληλος στο οριζόντιο επίπεδο και κάθετος στην μεταφορική ταχύτητα. Να υπολογιστεί το χρονικό διάστημα που απαιτείτε ώστε η σφαίρα να σταματήσει την ολίσθηση και να αρχίσει να κυλίεται χωρίς ολίσθηση στις παρακάτω 2 αρχικές συνθήκες : α) $u_0>\omega_0 R$ και β) $u_0<\omega_0 R$ (Να υποθέσετε και στις δύο περιπτώσεις ότι η u_0 έχει φορά προς τα δεξιά και σφαίρα στρέφεται με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.)

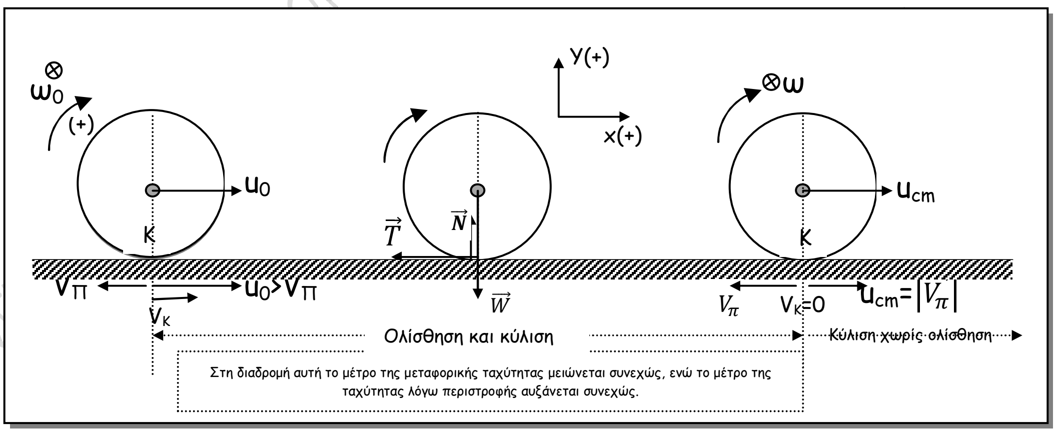
Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο της $I_{cm}=\frac{2}{5}mR^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας g και ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως μ ο οποίος θεωρείται ίσος με τον συντελεστή οριακής στατικής τριβής.

<u>Απάντηση</u>

Α) Αν $u_0>\omega_0.R$

Κάθε σημείο του τροχού εκτελεί σύνθετη κίνηση. Η ταχύτητα $\vec{V}_K$(η συνολική ταχύτητα) του σημείου επαφής είναι : $V_K=u_0-\omega_0 R$, με κατεύθυνση προς τα εμπρός (όπως το σχήμα). Άρα η τριβή που ασκείται στο σημείο επαφής είναι τριβή ολισθήσεως (η Τριβή είναι στατική όταν το σημείο επαφής έχει ταχύτητα μηδέν) και έχει κατεύθυνση προς τα εμπρός αφού $u_0>\omega_0.R$. Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στον τροχό είναι αυτές του σχήματος.

> Γνωρίζουμε ότι όταν έχουμε *κύλιση χωρίς ολίσθηση* η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι ίση κατά μέτρο με την ταχύτητα λόγω περιστροφής των σημείων της περιφέρειας, δηλαδή $u_0=\omega_0 R$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το σημείο επαφής να έχει κάθε χρονική στιγμή συνολική ταχύτητα $u_{συνισταμένη}=0=V$



Α. <u>Για την μεταφορική κίνηση του cm</u> έχουμε : Από την ισορροπία του τροχού στον άξονα y'y έχουμε : $\Sigma F_y=0 \Rightarrow N-W=0 \Rightarrow N = W$. Οπότε για το μέτρο της τριβής έχουμε : $T=\mu.N \Rightarrow \boxed{T = \mu mg}$ (1)

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε : $\Sigma F_X=ma_{cm} \Rightarrow -T= ma_{cm} \Rightarrow$

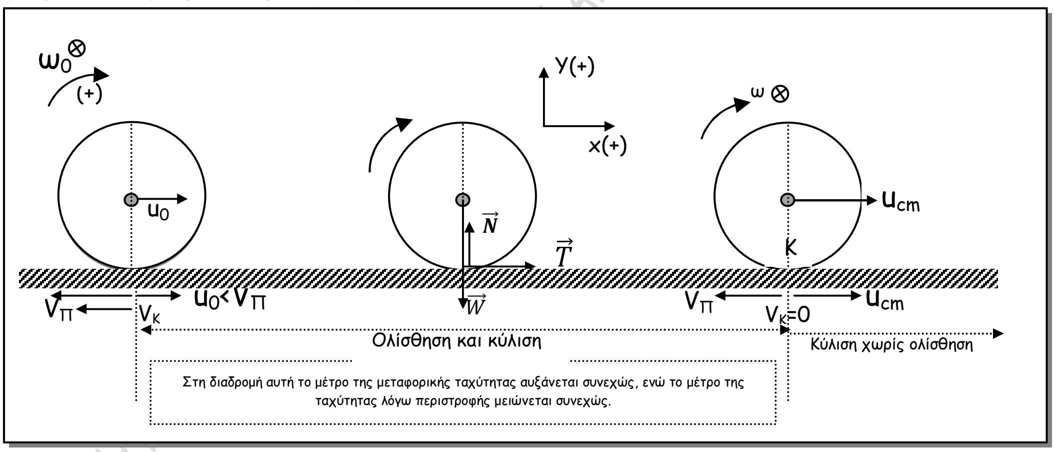
$\boxed{a_{cm}=-\mu g}$ (2). Από (2) είναι φανερό ότι η a_{cm} είναι σταθερή κατά μέτρο, άρα η κίνηση του cm της σφαίρας είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη οπότε και ισχύουν οι εξισώσεις : $u = u_0-|a_{cm}|.t \Rightarrow$ $\boxed{u = u_0-\mu g t}$ (3) $\boxed{\Delta x = u_0 t-\frac{1}{2}\mu g t^2}$ (4)

Β. Για τη στροφική κίνηση του τροχού : Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης έχουμε : $\Sigma\tau_{(\text{ως προς το κέντρο})}=I_{(\text{ως προς το κέντρο})}.a_{\gamma\omega\nu.}\ \omega \Rightarrow T.R = \frac{2}{5}mR^2 a_{\gamma\omega\nu.} \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}$ (5) [= σταθερή: οπότε έχουμε ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση]. Συνεπώς η ταχύτητα λόγω περιστροφής των σημείων της περιφέρειας δίνεται $V_\pi=\omega.R = (\omega_0+a_{\gamma\omega\nu.}t).R \overset{(5)}{\Rightarrow}$ $\boxed{V_\Pi = \omega_0 R + \frac{5}{2}\mu g t}$ (6)

Η κίνηση της σφαίρας θα μετατραπεί από κίνηση με ολίσθηση σε κύλιση χωρίς ολίσθηση την χρονική στιγμή που το μέτρο της μεταφορικής ταχύτητας γίνει ίσο με το μέτρο της ταχύτητας λόγω περιστροφής των σημείων της περιφέρειας, δηλαδή όταν : $u=V_\pi \xrightarrow{(3),(6)} u_0-\mu g t = \omega_0 R + \frac{5}{2}\mu g t \Rightarrow$ $\boxed{t = \frac{2}{7}\left(\frac{u_0-\omega_0 R}{\mu g}\right)}$ (7)

Β) Αν $u_o<\omega R$ τότε η συνισταμένη ταχύτητα του σημείου επαφής έχει αρνητική κατεύθυνση δηλαδή προς τα πίσω. Συνεπώς η τριβή ολισθήσεως έχει κατεύθυνση προς τα εμπρός όπως το παρακάτω σχήμα :



➢Για την μεταφορική κίνηση του cm έχουμε : Από την ισορροπία του τροχού στον άξονα y'y έχουμε : $\Sigma F_y=0 \Rightarrow N-W=0 \Rightarrow N = W$. Οπότε για το μέτρο της τριβής έχουμε : $T=\mu.N \Rightarrow$ $\boxed{T = \mu m g}$ (8)

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε : $\Sigma F_X=ma_{cm} \Rightarrow T= ma_{cm} \Rightarrow$ $\boxed{a_{cm} =\mu g}$ =σταθερή (9). Αφού η a_{cm} είναι σταθερή αυτό σημαίνει ότι η κίνηση του cm είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, συνεπώς οι εξισώσεις κίνησης είναι: $\boxed{u = u_0+ \mu g t}$ (10) και $\boxed{\Delta x = u_0 t+ \frac{1}{2}\mu g t^2}$ (11)

Για τη στροφική κίνηση έχουμε :

$\Sigma\tau_{(\text{ως προς το κέντρο})}=I_{(\text{ως προς το κέντρο})}.a_{\gamma\omega\nu.}\ \omega \Rightarrow -T.R = \frac{2}{5}mR^2 a_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow$

$\boxed{a_{\gamma\omega\nu} =-\frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}}$ (12) [=σταθερή: οπότε έχουμε ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση].

Οπότε και η εξίσωση που σχετίζεται με την περιστροφή της σφαίρας είναι :

$V_\pi = \omega.R = (\omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu.} t)\, R \Longrightarrow \boxed{V_\Pi = \omega_0 R - \frac{5}{2}\mu g t}$ (13)

Η κίνηση λοιπόν της σφαίρας μετατρέπεται από κύλιση με ολίσθηση σε κύλιση χωρίς ολίσθηση όταν η συνολική ταχύτητα του κατώτερου σημείου, δηλαδή του σημείου επαφής γίνει μηδέν, δηλαδή όταν $V_K=0 \Longrightarrow$

$u_{cm} = V_\pi \xRightarrow{(10),(13)} u_0 + \mu g t = \omega_0 R - \frac{5}{2}\mu g t \Longrightarrow \boxed{t = \frac{2}{7}\left(\frac{\omega_0 R - u_0}{\mu g}\right)}$ (14)

Σημειώσεις : α) Στην εφαρμογή του Θεμελιώδη νόμου της στροφικής η ροπή των $\vec{N}$ και $\vec{W}$ είναι μηδέν γιατί οι φορείς τους διέρχονται από τον άξονα περιστροφής, δηλαδή το κέντρο του τροχού.

β) Υπάρχει ακόμα 1 περίπτωση στην μελέτη τέτοιας κίνησης. Στην αρχή θεωρήσαμε ότι η σφαίρα τίθεται σε περιστροφή με φορά ίδια με την φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Υπάρχει και η περίπτωση να τεθεί η σφαίρα σε περιστροφή αντιωρολογιακά (αριστερόστροφα). Πάλι όμως ο λογισμός είναι ίδιος με τις παραπάνω περιπτώσεις.